

## Phát triển công thức từ thế véc tơ bằng kỹ thuật liên kết một chiều các bài toán con - Ứng dụng cho bài toán điện từ có cấu trúc vỏ mỏng

### Development of magnetic vector potential formulations by one way-coupling subproblem technique-Application to electromagnetic thin shell problems

Bùi Đức Hùng và Đặng Quốc Vương

<sup>1</sup>Khoa Điện, Trường Điện-Điện Tử, Trường đại học Bách Khoa Hà Nội  
E-mail: [vuong.dangquoc@hust.edu.vn](mailto:vuong.dangquoc@hust.edu.vn)

#### Tóm tắt

Bài toán điện từ luôn tồn tại và đóng một vai trò rất quan trọng trong hệ thống điện nói chung và thiết bị điện nói riêng. Có thể xem đây là bài toán xương sống quyết định đến quá trình làm việc và sự ổn định của hệ thống và thiết bị điện. Do vậy, việc phân tích, tính toán và mô phỏng các hiện tượng vật lý, quá trình biến đổi điện từ của bài toán điện từ luôn là chủ đề rất đang được quan tâm và luôn mang tính thời sự đối với các nhà nghiên cứu trong và ngoài nước. Trong nghiên cứu này, nhóm tác giả phát triển công thức từ thế véc tơ bằng kỹ thuật liên kết một chiều các bài toán nhỏ để tính toán để tính toán các đại lượng trường (mật độ từ cảm, dòng điện xoáy và tổn hao công suất) trong miền dẫn điện và từ có cấu trúc vỏ mỏng của các thiết bị điện từ (như màn chắn điện từ, lõi thép, vỏ máy biến áp...). Sự phù hợp của phương pháp được kiểm chứng thông qua bài toán thực tế “TEAM problem 21, model B).

**Từ khóa:** Công thức từ thế véc tơ, mật độ từ cảm, dòng điện xoáy, tổn hao công suất, liên kết bài toán con, phương pháp phân tử hữu hạn.

#### Abstract

Electromagnetic problems always exist and plays an important role in the fields of electrical systems in general and electrical equipments in particular. It can be considered as a spine problem decided to the working process of the electrical systems and devices. Hence, the analysis, computation and simulation of physic phenomena, electromagnetic processes of the electromagnetic problems are really an important topic concerning for researchers in Viet Nam and in the world as well. In this study, a magnetic vector potential formulation is developed by one way-coupling subproblem technique to calculate field quantities (magnetic field density, eddy current density, joule power loss) existing and occurring in thin conducting regions of electrical equipments (shieldings, iron cores, transformer tanks). The development of the method will be verified via the practical problem “TEAM problem 21, model B).

**Key words-** Magnetic vector potential formulation; magnetic field density, eddy current density, joule power loss, one-way coupling subproblem technique, finite element method.

#### 1. Đặt vấn đề

Như chúng ta đã biết, các bài toán từ động đã tồn tại và không thể thiếu trong hệ thống điện công nghiệp và dân dụng, trong các thiết bị điện, cụ thể như: chung và thiết bị điện nói riêng như: máy điện tĩnh, máy điện quay, phanh điện từ, cuộn kháng. Một điều đặc biệt rằng, các quá trình biến đổi điện từ trong các thiết bị nói trên đều được mô tả thông qua hệ phương trình Maxwell và được biểu diễn dưới dạng vi - tích phân. Mối quan hệ giữa các đại lượng trường (từ thế véc tơ, véc tơ mật độ từ cảm, cường độ từ trường và cường độ điện trường) trong

hệ phương trình Maxwell được biểu diễn thông qua các luật trạng thái.

Để giải được hệ phương trình Maxwell này, một số phương pháp số phổ biến như: phân tử hữu hạn, phân tử biên, sai phân hữu hạn... được các nhà nghiên cứu áp dụng [1]-[3]. Tuy nhiên, đối với mô hình bài toán có cấu trúc lớn, cấu trúc phức tạp và cấu trúc vỏ mỏng, việc áp dụng trực tiếp các phương pháp trên để giải sẽ gặp nhiều khó khăn, thậm chí không thể thực hiện được với miền tần số cao có hiệu ứng bề mặt lớn.

Do đó, để khắc phục và vượt qua được khó khăn trên, nhóm tác giả đã phát triển phương pháp liên kết một chiều các bài toán con với công thức từ thế véc tơ  $a$  để phân tích, tính toán và mô phỏng các đại lượng trường trong bài toán từ động mà không phải sử dụng phương pháp lặp nghiệm [4]. Nội dung của phương pháp được thực hiện theo kịch bản chia để trị [5]-[7], có nghĩa rằng chia một mô hình bài từ động với kích thước lớn thành các bài toán con với kích thước nhỏ hơn, trong đó:

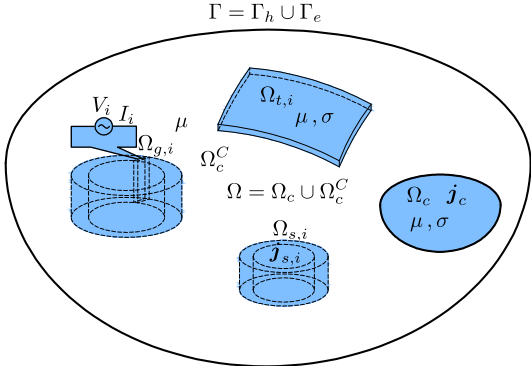
- Bài toán con thứ nhất ( $SP_q$ ) được giải với một hình cuộn dây mà không bao gồm bất kỳ miền mỏng dẫn từ nào;
- Bài toán con thứ hai ( $SP_p$ ) được thêm vào để giải và với nguồn là nghiệm của bài toán con thứ nhất  $SP_q$ ;
- Bài toán con thứ 3 ( $SP_k$ ) được đề xuất để hiệu chỉnh sai số gây ra do bài toán con thứ  $SP_p$ .

Tiến trình giải mỗi một bài toán con được thực hiện trên miền và lưới độc lập riêng và không phụ thuộc vào miền và lưới của các bài toán con trước và sau đó. Điều này sẽ thuận lợi cho việc chia lưới và giảm được thời gian tính toán, nâng cao được độ tin cậy của kết quả. Mỗi một bài toán con được ràng buộc thông qua các nguồn mặt và nguồn khối [5], [6].

## 2. Cấu trúc bài toán điện từ

### 2.1. Hệ phương trình Maxwell

Xét bài toán từ động được xác định trong miền nghiên cứu  $\Omega$ , với biên  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_e$  trong không gian hai chiều và ba chiều (Hình 1).



Hình 1. Mô hình tổng quát bài toán điện từ.

Hệ phương trình Maxwell của các bài toán con thứ  $i$ , các điều kiện biên cùng với các luật trạng thái được viết trong không gian ba chiều Euclydean  $\mathbb{R}^3$  [7], [8] là:

$\text{curl } \mathbf{H}_i = \mathbf{j}_s, \text{div } \mathbf{b}_i = 0, \text{curl } \mathbf{e}_i = -\partial_t \mathbf{b}_i$  (1a-b-c) trong đó  $\mathbf{h}_i$  là cường độ từ trường (A/m),  $\mathbf{e}_i$  là cường độ điện trường (V/m),  $\mathbf{b}_i$  là mật độ từ cảm (T),  $\mu$  là độ từ thẩm của vật liệu từ,  $\sigma$  là độ dẫn điện (S/m),  $\mathbf{j}_s$  là mật độ dòng điện thuộc về miền không dẫn từ  $\Omega_c^C$  (với  $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_c^C$ ). Các điều kiện biên của bài toán được xác định trên  $\Gamma_h$  và  $\Gamma_e$ , đó là:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h}_i = \mathbf{j}_{f,i}, \mathbf{n} \times \mathbf{b}_i|_{\Gamma_{b,i}} = \mathbf{f}_{f,i}. \quad (2a-b)$$

Trong đó,  $\mathbf{n}$  là véc tơ pháp tuyến đơn vị.

Các trường  $\mathbf{j}_{f,i}$  và  $\mathbf{f}_{f,i}$  trong phương trình (2a-b) được xác định như là các nguồn mặt (SS) tồn tại và xuất hiện tại bề mặt tiếp xúc giữa các bài toán con thông qua các biên  $\gamma_i^+$  and  $\gamma_i^-$  [5]-[8].

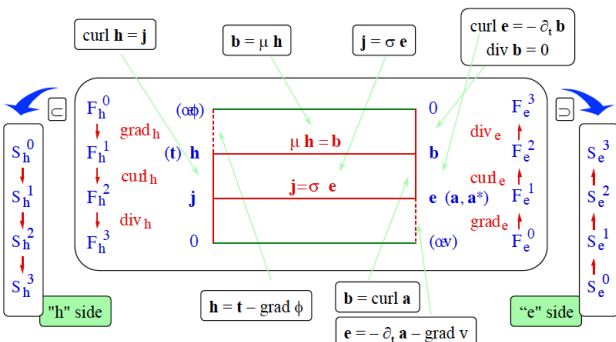
Các luật trạng thái được xác định:

$$\mathbf{h}_i = \mu_i^{-1} \mathbf{b}_i + \mathbf{h}_{s,i}, \mathbf{j}_i = \sigma_i \mathbf{e}_i + \mathbf{j}_{s,i}, \quad (3a-b)$$

Trong đó,  $\mathbf{j}_i$  là mật độ dòng điện xoáy được xác định trong miền dẫn từ  $\Omega_c$  (với  $\Omega_c \subset \Omega$ ), các trường  $\mathbf{h}_{s,i}$  và  $\mathbf{j}_{s,i}$  là các nguồn khối (VSS) biểu diễn sự thay đổi đặc tính vật liệu từ bài toán con này đến bài toán con khác. Ví dụ thay đổi từ bài toán con  $i=p$  đến bài toán con  $i=k$ , các trường này được xác định như sau [8]:

$$\mathbf{h}_{s,k} = (\mu_k^{-1} - \mu_p^{-1}) \mathbf{b}_p, \quad (4)$$

$$\mathbf{j}_{s,k} = (\sigma_k - \sigma_p) \mathbf{e}_p. \quad (5)$$



Hình 2. Sơ đồ Tonti [6].

Hệ phương trình (1a-b-c) được giải với các điều kiện biên (2a-b) và các luật trạng thái (3a-b).

Ngoài ra, các trường  $\mathbf{h}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{j}_i$  sẽ được xác định và kiểm chứng thông hai cạnh bên trái ("h"-side) và cạnh bên phải ("e"-side) của sơ đồ Tonti [3] (hình 2).

Trong đó, các trường  $\mathbf{h}_i \in \mathbf{F}_h(\text{curl}; \Omega)$ ,  $\mathbf{j}_i \in \mathbf{F}_h(\text{div}; \Omega)$ ,  $\mathbf{e}_i \in \mathbf{F}_e(\text{curl}; \Omega)$  và  $\mathbf{b}_i \in \mathbf{F}_e(\text{div}; \Omega)$ .  $\mathbf{F}_h(\text{curl}; \Omega)$  và  $\mathbf{F}_e(\text{div}; \Omega)$  là các không gian hàm chứa các điều kiện biên và các trường của miền nghiên cứu  $\Omega$ .

### 2.2. Phương trình rời rạc với công thức véc tơ từ thế a

Phương trình Maxwell (1a-b-c) được viết với công thức véc tơ từ thế A cho các bài toán con  $SP_i$  ( $i \equiv q, p, k$ ) được thể hiện như sau [4]-[9]:

$$\begin{aligned} & (\mu_i^{-1} \text{curl } \mathbf{a}_i, \text{curl } \mathbf{a}_i)_{\Omega_i} + (\sigma_i \partial_t \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)_{\Omega_{c,i}} + (\mathbf{h}_{s,i}, \text{curl } \mathbf{a}_i)_{\Omega_i} \\ & + \langle \mathbf{n} \times \mathbf{h}_i, \mathbf{a}_i \rangle_{\Gamma_{h,i} - \Gamma_{t,i}} + \langle [\mathbf{n} \times \mathbf{h}_i]_{\Gamma_{t,i}}, \mathbf{a}_i \rangle_{\Gamma_{t,i}} \\ & = (\mathbf{j}_i, \mathbf{a}_i)_{\Omega_{s,i}}, \forall \mathbf{a}_i \in F_i^1(\Omega_i), \quad (6) \end{aligned}$$

trong đó các miền nghiên cứu  $\Omega_{c,i}$  và  $\Omega_{c,i}^C$  bao gồm không gian hàm chứa các hàm nội suy (hàm dạng) và hàm thử. Tại mức độ rời rạc, không gian hàm này được xác định thông các thông lượng véc tơ cạnh. Các ký hiệu  $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$  và  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$  lần lượt là các tích phân khối xác định trong miền nghiên cứu  $\Omega$  và tích phân mặt xác định trên  $\Gamma$ . Tích phân trên bề mặt  $\Gamma_{h,i} - \Gamma_{t,i}$  được xác định bằng không thông qua điều kiện biên tự nhiên [4].

Tích phân  $\langle [\mathbf{n} \times \mathbf{h}_i]_{\Gamma_{t,i}}, \mathbf{a}_i \rangle$  trong (6) được xác định trong [4], đó là:

$$\langle [\mathbf{n} \times \mathbf{h}_i]_{\Gamma_{t,i}}, \mathbf{a}_i \rangle = \langle -\sigma \beta \partial_t (2\mathbf{a}_{c,i} + \mathbf{a}_{d,i}), \mathbf{a}_i \rangle. \quad (7)$$

## 3. Rời rạc hoá của đại lượng từ thế véc tơ a

Từ thế véc tơ  $\mathbf{a}$  trong phương trình rời rạc (6) được rời rạc theo phần tử cạnh với không gian hàm  $\mathbf{F}_h^1(\text{curl}; \Omega)$  trong sơ đồ Tonti [3] và được xác định:

$$\mathbf{a} = \sum_{e \in E(\Omega)} a_e \mathbf{s}_e, \quad (8)$$

trong đó  $E(\Omega)$  là tập hợp của tất cả các cạnh của miền  $\Omega$ ,  $\mathbf{s}_e$  là hàm nội suy cạnh được kết hợp với cạnh  $e$  và  $a_e$  là thông lượng của trường  $\mathbf{a}$  dọc theo cạnh  $e$  của miền nghiên cứu. Thay phương trình (7) và (8) vào phương trình (6), phương trình rời rạc được viết lại như sau [3]:

$$\begin{aligned} & \left( \mu_i^{-1} \text{curl } \sum_{e \in E(\Omega)} a_e \mathbf{s}_e, \text{curl } \mathbf{a}_i \right)_{\Omega_i} \\ & + \left( \sigma_i \partial_t \sum_{e \in E(\Omega)} a_e \mathbf{s}_e, \mathbf{a}_i \right)_{\Omega_{c,i}} \\ & + (\mathbf{h}_{s,i}, \text{curl } \mathbf{a}_i)_{\Omega_i} \\ & + \langle -\sigma \beta \partial_t (2\mathbf{a}_{c,i} + \mathbf{a}_{d,i}), \mathbf{a}_i \rangle \\ & = (\mathbf{j}_i, \mathbf{a}_i)_{\Omega_{s,i}}, \forall \mathbf{a}_i \in F_i^1(\Omega_i), \quad (9) \end{aligned}$$

### 4. Kết nối nghiệm giữa các bài toán con

Như đã phân tích ở phần trước, nghiệm của bài toán con ( $SP_q$ )  $\mathbf{a}_q$  được giải trong miền  $\Omega_q \subset \Omega_p$  được xem như là nguồn cho bài toán con tiếp  $SP_p$  theo được giải trong miền  $\Omega_p \subset \Omega_k$ . Một cách tương tự, nghiệm của bài toán con ( $SP_p$ )  $\mathbf{a}_p$  sẽ là nguồn cho bài toán  $SP_k$ . Tại mức độ rời rạc, nghiệm của của các bài toán con trước  $\mathbf{a}_q$  được xác định trên lưới và miền  $\Omega_q$  được ánh xạ lên lưới và miền của bài toán con  $\Omega_p$  thông qua phương pháp ánh xạ nghiệm [4], đó là:

$$(\text{curl } \mathbf{a}_{q-p}, \text{curl } \mathbf{a}'_p)_{\Omega_p} = (\text{curl } \mathbf{a}_q, \text{curl } \mathbf{a}'_p)_{\Omega_q},$$

$$\forall \mathbf{a}'_p \in F_p^1(\Omega_p), \quad (10)$$

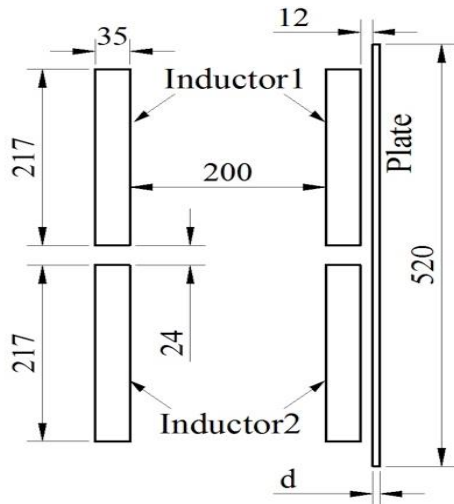
$$(\text{curl } \mathbf{a}_{p-k}, \text{curl } \mathbf{a}'_k)_{\Omega_k} = (\text{curl } \mathbf{a}_p, \text{curl } \mathbf{a}'_k)_{\Omega_p}$$

$$\forall \mathbf{a}'_k \in F_k^1(\Omega_k). \quad (11)$$

Trong đó,  $F_p^1(\Omega_p)$  và  $F_k^1(\Omega_k)$  là các không gian hàm cho các nguồn  $\mathbf{a}_{q-p}$  và  $\mathbf{a}_{p-k}$ .

### 5. Bài toán ứng dụng

Bài toán ứng dụng để kiểm chứng sự phát triển của phương pháp bao gồm 2 cuộn dây và một màn chắn điện từ “TEAM problem 21, model B [9]” như mô tả tại hình 3, với các tham số số từ động 10A.vòng;  $f = 50\text{Hz}$  (tần số),  $\mu_r = 200$  (độ từ thẩm tương đối và  $\sigma = 6.484 \frac{\text{MS}}{\text{m}}$  (độ dẫn điện).

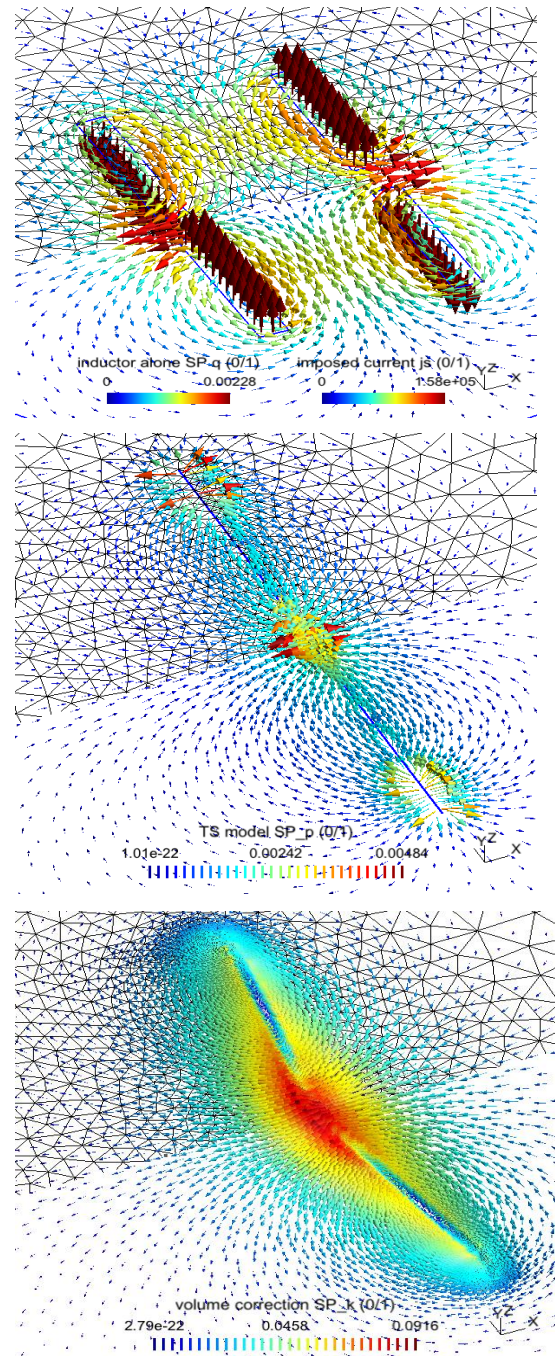


Hình 3. Mô hình 2D của bài toán “TEAM problem 21 [10].

Theo như kịch bản đã trình bày ở phần 1, tiến trình giải bài toán được thực hiện 3 bước: bài toán thứ nhất  $SP_q$  được giải (xem xét) với cuộn dây mà không bao gồm miền dẫn mỏng; sau đó bài toán thứ 2 với miền dẫn mỏng  $SP_p$  được thêm vào qua nguồn mặt (SSs); sai số của miền mỏng dẫn từ được hiệu chỉnh thông qua bài toán thứ ba  $SP_k$  với điều kiện biên là nguồn khối (VSs).

Sự phân bố của mật độ từ thông sinh được ra bởi dòng điện đặt vào cuộn dây với mô hình bài toán con  $SP_q$  được biểu diễn như hình 4 (trên). Nghiệm này được xem như là một nguồn mặt SS để tính toán sự phân bố của từ trường trên miền mỏng dẫn từ  $SP_p$  (hình 4, giữa). Tuy nhiên, nghiệm của miền mỏng xuất hiện một số sai số do bỏ qua hiệu ứng cạnh và góc. Do

đó, nghiệm này được hiệu chỉnh bằng miền hiệu chỉnh  $SP_k$  thông qua nguồn khối (VS) (hình 4, dưới).



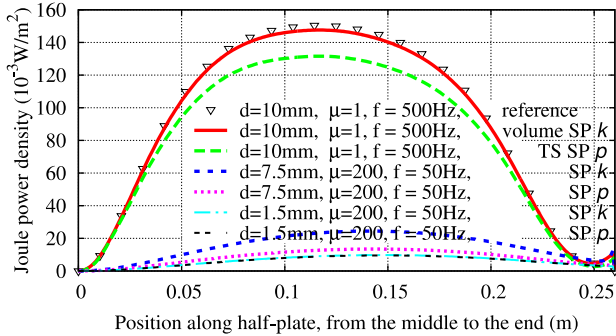
Hình 4. Sự phân bố của từ thông trên các bài toán con:  $SP_q$  (trên),  $SP_p$  (giữa) và  $SP_k$  (dưới).

Sự phân bố của mật độ công suất của các bài toán con ( $SP_p$  và  $SP_k$ ) dọc theo màn chắn điện từ ứng với các bề dày khác ( $d = 1.5\text{mm}$ ,  $d = 7.5\text{mm}$  và  $d = 10\text{mm}$ ) và các tham số đặc tính vật liệu ( $\mu = 1, \mu = 100$ ) tần số ( $f = 50\text{Hz}$ ,  $f = 200\text{Hz}$ ) khác nhau được tính toán và biểu diễn trong hình 5 và Bảng 1. Cụ thể trong Bảng 1, với trường hợp  $d = 1.5\text{mm}$ , sai số lớn nhất giữa nghiệm tìm được từ bài toán con  $SP_p$  và  $SP_k$  nhỏ hơn 17.54%.

Tuy nhiên, ứng với khi bề dày của tấm chắn điện từ tăng lên từ  $d = 1.5\text{mm}$  đến  $d = 10\text{mm}$ , với  $\mu = 1$ , tần số  $f = 200\text{Hz}$ , sai số lên tới 53.2%, với hiệu ứng và độ thâm sâu bề mặt  $\delta = 0.218\text{mm}$ . Nghiệm của bài toán hiệu chỉnh  $SP_k$  cũng được

kiểm chứng và so sánh với nghiệm tìm được từ phương pháp phần tử hữu hạn kinh điển với sai số nhỏ hơn 3% (hình 5).

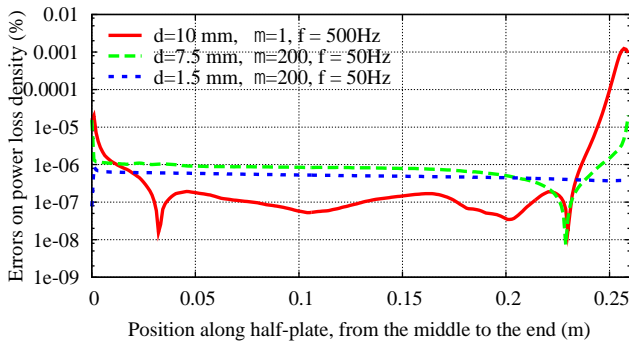
Sai số của nghiệm bài toán con  $SP_p$  sau khi đã được hiệu chỉnh bởi miền hiệu chỉnh  $SP_k$  được thể hiện trong hình 6. Có thể nhận thấy, sai số nhỏ hơn 0.01% ứng với các trường hợp  $d = 1.5\text{mm}$ ,  $d = 7.5\text{mm}$  và  $d = 10\text{mm}$ , điều đó chứng tỏ rằng việc hiệu chỉnh sai số xuất hiện trên miền mỏng dẫn từ thông qua miền hiệu chỉnh đạt kết quả chính xác rất cao.



**Hình 5.** Sự phân bố mật độ công suất của các bài toán con ( $SP_p$  và  $SP_k$ ), với các bề dày, tham số vật liệu và tần số khác nhau của màn chắn điện từ.

**Bảng 1:** Tồn hao công suất trên miền mỏng và miền hiệu chỉnh với các chiều dày khác nhau của tấm chắn điện từ trước khi hiệu.

$d$ (mm)	$f$ (Hz)	Tồn hao công suất (W)		
		Nghiệm của bài toán $SP_p$	Nghiệm của bài toán $SP_k$	error (%)
1.5	50	0.019	0.023	17.54
10	50	0.029	0.054	46.30
2	200	0.158	0.224	29.46
10	200	0.125	0.266	53.20



**Hình 6.** Sai số của nghiệm bài toán con  $SP_p$  sau khi đã được hiệu chỉnh bởi bài toán con  $SP_k$ .

## 6. Kết luận

Công thức từ thể véc tơ bằng kỹ thuật liên kết một chiều các bài toán con đã phát triển thành công để tính toán, phân tích và mô phỏng sự phân bố của từ trường, mật độ tổn hao công suất trên miền mỏng dẫn từ với bài toán con  $SP_p$ . Đặc biệt, phương pháp đã cho phép hiệu chỉnh sai số đến từ bài toán con  $SP_p$  (do bỏ qua hiệu ứng cạnh và góc) thông qua bài toán con hiệu chỉnh  $SP_k$ . Sự phát triển của phương pháp đã được kiểm chứng trên bài toán thực tế “TEAM Problem 21, mô hình B [9]”. Các kết quả đạt được từ phương pháp sẽ là cơ sở để phân tích và tính toán toán nhiệt, cũng như mô phỏng

sự phân bố của từ trường đối với môi trường xung quanh khi kể đến màn chắn điện từ và không kể đến màn chắn điện từ. Ngoài ra, các kết quả đạt được cũng là tiền đề để định hướng phát triển kỹ thuật liên kết hai chiều cho các bài toán trong các nghiên cứu tiếp theo.

Các kết quả mô phỏng của bài báo được thực hiện dựa trên hai phần mềm mã nguồn mở được **Gmsh** (<https://geuz.org/svn/gmsh/>) và **GetDP** (<http://geuz.org/getdp/>) được viết bởi hai giáo sư Patrick Dular và Christophe Geuzaine, Đại học Liege, Vương Quốc Bỉ. Source code của bài toán này được mở rộng từ phương pháp các bài toán con được phát triển bởi PGS. TS. Đặng Quốc Vương, GS. Christophe Geuzaine và GS. Patrick Dular.

## Tài liệu tham khảo

- [1] S. Koruglu, P. Sergeant, R.V. Sabariego, Vuong. Q. Dang, M. De Wulf “Influence of contact resistance on shielding efficiency of shielding gutters for high-voltage cables,” IET Electric Power Applications, Vol.5, No.9, (2011), pp. 715-720.
- [2] Gerard Meunier (2008), The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling, John Wiley & Sons, Inc.
- [3] R. V. Sabariego, “The Fast Multipole Method for Electromagnetic Field Computation in Numerical and Physical Hybrid System,” Ph. D thesis, 2006, University of Liege, Belgium.
- [4] Dang Quoc Vuong “An iterative subproblem method for thin shell finite element magnetic models,” The University of Da Nang Journal of Science and Technology, no 12 (121). 2017.
- [5] P. Dular, Vuong Q. Dang, R. V. Sabariego, L. Krähenbühl and C. Geuzaine, “Correction of thin shell finite element magnetic models via a subproblem method,” IEEE Trans. Magn., Vol. 47, no. 5, pp. 158 –1161, 2011.
- [6] V. D. Quoc, “Accurate Magnetic Shell Approximations with Magnetostatic Finite Element Formulations by a Subdomain Approach”, *Eng. Technol. Appl. Sci. Res.*, vol. 10, no. 4, pp. 5953–5957, Aug. 2020.
- [7] Vuong Q. Dang, R.V. Sabariego, L. Krähenbühl, C. Geuzaine, “Subproblem Approach for Modeling Multiply Connected Thin Regions with an h-Conformal Magnetodynamic Finite Element Formulation,” in EPJ AP (Vol. 63, No.1 (2013)).
- [8] Dang Quoc Vuong and Nguyen Duc Quang, “Coupling of Local and Global Quantities by A Subproblem Finite Element Method – Application to Thin Region Models,” ISSN 1859-2171 – Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal (ASTESJ), Vol 4, no.2, 40-44 (2019).
- [9] Zhiguang CHENG, Norio TKAHASHI, and Behzad Forghani “TEAM Problem 21 Family (V.2009),”- <http://www.compumag.org/>.